M5160 Obyčejné Diferenciální Rovnice

Štěpán Zapadlo

2024-03-02

Webová verze těchto materiálů je dostupná zde.

1 Diferenciální rovnice prvního řádu

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je daná množina a $F : M \to \mathbb{R}$ daná funkce. Rovnice

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

kde $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu**. Řešení rovnice (1) je každá funkce $y = \varphi(x)$, která má derivaci na nějakém intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ a

$$[x, \varphi(x), \varphi'(x)] \in M \quad \& \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

Graf funkce $y = \varphi(x)$, tj. množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in \mathcal{I}, y = \varphi(x)\}$ se nazývá **integrální křivka** rovnice (1). Lze-li navíc rovnici (1) upravit na tvar $y' = f(x, y)$ pro $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, potom se nazývá **rozřešená vzhledem k derivaci** (explicitní rovnice). Definujme dále některé pojmy:

- **počáteční (Cauchyho) úloha** – hledáme řešení $y = \varphi(x)$ explicitní rovnice, kterého integrální křivka prochází pevně zvoleným bodem $[x_0, y_0] \in D$, tj.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

  přičemž takové řešení nazveme **partikulární**;
- **všeobecné řešení** explicitní rovnice – funkce $y = \varphi(x, C)$ závisí na jednom reálném parametru C, pomocí které lze vhodnou volbou C získat řešení každé úlohy (2), tj. pro libovolné $[x_0, y_0] \in D$;
- **úplné řešení** – řešení úlohy (2), které není *zúžením* žádného jiného řešení. Pokud má úloha (2) má úplné řešení s vlastností, že každé jiné řešení je jeho zúžením, potom říkáme, že **počáteční úloha** (2) **má právě jedno řešení**;
- **singulární řešení** – řešení explicitní rovnice s vlastností, že v každém bodě jeho integrální křivky je porušená jednoznačnost řešení úlohy (2).

1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Diferenciální rovnice tvaru
$$y' = g(x)h(y), \tag{3}$$
kde g, h jsou dané funkce, se nazývá **rovnice se separovanými proměnnými**.

Teorém 1.1. *Nechť $\mathscr{I}_g, \mathscr{I}_h$ jsou dané **otevřené** intervaly v $\mathbb{R}$. Nechť g je **spojitá** na $\mathscr{I}_g$ a h **spojitá** na $\mathscr{I}_h$ taková, že $h(y) \neq 0$ pro každé $y \in \mathscr{I}_h$. Potom pro každý bod $[x_0, y_0] \in \mathscr{I}_g \times \mathscr{I}_h$ má každá počáteční úloha*
$$y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{4}$$
právě jedno řešení $y = \varphi(x)$, které je určené implicitně rovnicí
$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} = \int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s.$$
Toto řešení je definované na intervalu $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{I}_g$ určeném podmínkou
$$x \in \mathscr{I} \iff \inf_{\lambda\in\mathscr{I}_h} \int_{y_0}^{\lambda} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} < \int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s < \sup_{\lambda\in\mathscr{I}_h} \int_{y_0}^{\lambda} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)}.$$

Teorém 1.2. *Nechť platí předpoklady Teorém 1.1, přičemž navíc nechť interval $\mathscr{I}_h$ je **ohraničený**, t.j. $\mathscr{I}_h = (c, d)$. Pokud funkce h splňuje $h(d) = 0$ a*
$$\lim_{\lambda\to d^-} \left| \int^{\lambda} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \right| = \infty,$$
potom počáteční úloha (4) má pro každé $x_0 \in \mathscr{I}_g$ a každé $y_0 \in (c, d]$ právě jedno řešení. Podobně, pokud funkce h splňuje $h(c) = 0$ a
$$\lim_{\lambda\to c^+} \left| \int^{\lambda} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \right| = \infty,$$
potom úloha (4) má pro každé $[x_0, y_0] \in \mathscr{I}_g \times [c, d)$ právě jedno řešení.

Teorém 1.3. *Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je **konvexní oblast** a $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ je funkce taková, že platí $f(x, y) \neq 0$ pro každé $[x, y] \in D$. Potom*
$$f(x, y) = g(x)h(y) \quad \forall [x, y] \in D$$
právě tehdy, když
$$\det \begin{pmatrix} f(x, y) & f_y(x, y) \\ f_x(x, t) & f_{xy}(x, y) \end{pmatrix} = 0 \quad \forall [x, y] \in D.$$

Definice 1.1 (Homogenní funkce)**.** Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina **uzavřená na kladné skalární násobky**, t.j. platí

$$\alpha D := \{[\alpha x, \alpha y]; [x, y] \in D\} \subseteq D$$

pro libovolné $\alpha > 0$. Funkce $f : D \to \mathbb{R}$ se nazývá **(pozitivně) homogenní stupně** $k \in \mathbb{N}_0$, pokud pro každý bod $[x, y] \in D$ a každé $\alpha > 0$ platí

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y).$$

Speciálně, funkce f s vlastností

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y) \quad \forall [x, y] \in D, \alpha > 0$$

se nazývá **homogenní** (stupně 0).

Každá homogenní funkce $f : D \to \mathbb{R}$ stupně 0 lze vyjádřit jako podíl dvou homogenních funkcí stejného stupně. Navíc pokud množina D obsahuje pouze body $[x, y] \in D$ s $x \neq 0$, funkci f je možné reprezentovat ve tvaru $f(x, y) = \psi(\frac{y}{x})$ pro jistou funkci ψ jedné proměnné. Explicitní diferenciální rovnici prvního řádu poté nazveme **homogenní**, je-li příslušné f homogenní funkce stupně 0.

1.2 Lineární diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{5}$$

se nazývá **lineární rovnice**. Pokud je $b(x) \equiv 0$, hovoříme o **homogenní lineární rovnici**.

Teorém 1.4. *Nechť $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je **otevřený** interval a $a, b : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou **spojité** funkce. Potom pro každý bod $[x_0, y_0] \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}$ má počáteční úloha*

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{6}$$

právě jedno úplné řešení, které existuje na celém $\mathcal{I}$, a má tvar

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\mathrm{d}s} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}s \right), \quad x \in \mathcal{I}.$$

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^r,$$

kde a, b jsou dané funkce a $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, se označuje jako **Bernoulliho rovnice**. Řešíme ji pak pomocí substituce $u := y^{1-r}$. Podobně definujeme **Riccatiho rovnici** jako

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x), \tag{7}$$

kde a, b, c jsou dané funkce. V obecnosti avšak množina řešení Riccatiho rovnice nelze vyjádřit v explicitním, ani implicitním tvaru.

Teorém 1.5. *Nechť $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je **otevřený** interval a $a, b, c : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou **spojité** funkce. Dále nechť φ_0 je nějaké řešení rovnice (7) na intervalu $\mathcal{I}$. Potom funkce $y = \varphi(x)$ je řešení rovnice (7) definované na vhodném subintervalu $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ a různé od φ_0 právě tehdy, když má tvar*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \frac{1}{\psi(x)}, x \in \mathcal{J},$$

kde funkce ψ je řešení lineární diferenciální rovnice

$$z' = -\left(2b(x)\varphi_0(x) + a(x)\right) z - b(x)$$

na intervalu $\mathcal{J}$.

Teorém 1.6. *Nechť $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je **otevřený** interval a $a, b, c : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jsou **spojité** funkce. Dále nechť φ_0 je nějaké řešení rovnice (7) na intervalu $\mathcal{I}$. Potom funkce $y = \varphi(x)$ je řešení rovnice (7) na vhodném subintervalu $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ právě tehdy, když*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x)$$

kde funkce $\psi(x)$ je řešení Bernoulliho rovnice

$$z' = \left(2b(x)\varphi_0(x) + a(x)\right) z + b(x)z^2$$

na intervalu $\mathcal{J}$.

1.3 Exaktní diferenciální rovnice

Uvědomme si, že v explicitní diferenciální rovnici můžeme uvažovat $f(x, y) = -\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ pro vhodné funkce p, q, kde $q(x, y) \neq 0$, tj. budeme pracovat s rovnicí

$$y' + \frac{p(x, y)}{q(x, y)} = 0,$$

resp. tvaru

$$p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{8}$$

Definice 1.2 (Exaktní rovnice)**.** Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je daná množina a $p, q : D \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce s $q(x, y) \neq 0$ na D. Pokud je výraz $p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y$ **prvním (úplným) diferenciálním** nějaké funkce $F : D \to X$, t.j. platí

$$\mathrm{d}F(x, y) = p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y \quad \forall [x, y] \in D, \tag{9}$$

potom se rovnice (8) nazývá **exaktní** na množině D.

Poznamenejme, že funkce F s vlastností (9) se nazývá **kmenová funkce** pro dvojici funkcí p, q na množině D (nebo též i **potenciálová funkce** pro vektorové pole (p, q) na D). Je známo, že pro D konvexní oblast v $\mathbb{R}^2$ je kmenová funkce F určena jednoznačně dvojicí p, q, až na aditivní konstantu.

Teorém 1.7. *Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je daná **konvexní oblast** a $p, q : D \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce s $q(x, y) \neq 0$ na D. Předpokládejme, že rovnice (8) je **exaktní** na množině D. Potom funkce $y = \varphi(x)$ je řešením rovnice (8) na intervalu $\mathcal{I}$ právě tehdy, když má funkce φ derivaci na $\mathcal{I}$ a platí $q(x, \varphi(x)) \neq 0$ a výraz $F(x, \varphi(x))$ je konstantní na $\mathcal{I}$.*

Teorém 1.8. *Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je daná **konvexní oblast** v $\mathbb{R}^2$ a $p, q : D \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce. Předpokládejme, že pro zvolený bod $[x_0, y_0] \in D$ jsou funkce p, q, p_y, q_x **spojité** na nějakém okolí $\mathcal{O}([x_0, y_0]) \subseteq D$ a nechť platí*

$$p_y(x, y) = q_x(x, y), \quad q(x, y) \neq 0, \quad [x, y] \in \mathcal{O}([x_0, y_0]).$$

*Potom rovnice (8) je **exaktní** na $\mathcal{O}([x_0, y_0])$ a má jediné řešení $y = \varphi(x)$, které je definované na jistém okolí bodu x_0 a splňuje $\varphi(x_0) = y_0$. Toto řešení je implicitně dané rovnicí $F(x, y) = 0$, kde funkce*

$$F(x, y) := \int_{x_0}^{x} p(t, y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} q(x_0, t)\mathrm{d}t, \quad [x, y] \in \mathcal{O}([x_0, y_0]).$$

V případě, že rovnice (8) není **exaktní**, pokoušíme se najít **integrační faktor**, tj. vhodnou funkci $\rho(x, y) \neq 0$ s vlastností, že ekvivalentní rovnice

$$\rho(x, y)p(x, y)\mathrm{d}x + \rho(x, y)q(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

již na dané množině exaktní je.

Teorém 1.9 (Kamkeho)**.** *Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je daná **konvexní oblast** a $p, q : D \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce. Předpokládejme, že pro zvolený bod $[x_0, y_0] \in D$ mají funkce p, q **spojité** první parciální derivace na nějakém jeho okolí a nechť $q(x_0, y_0) \neq 0$. Potom pro rovnici (8) **existuje integrační faktor** $\rho(x, y)$, který je definovaný na jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$.*

2 Systémy lineárních diferenciálních rovnic

Definujeme systém n lineárních diferenciálních rovnic jako

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \tag{10}$$

pro $t \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Je-li $\boldsymbol{b}(t) \equiv 0$, pak jej nazýváme **homogenní**. Řešení je libovolná diferencovatelná funkce $\boldsymbol{\varphi}$ definovaná na $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ taková, že

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{b}(t), \quad t \in \mathcal{J}.$$

Počáteční úloha pak přidává

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \tag{11}$$

pro $t_0 \in \mathcal{I}^o$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ daný vektor.

Lemma 2.1 (Gronwallovo)**.** *Nechť $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod a u a v jsou (skalární)* ***nezáporné*** *a* ***spojité*** *funkce na $\mathcal{I}$. Pokud existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$u(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\mathrm{d}s \right| \quad \forall t \in \mathcal{I},$$

potom také platí nerovnost

$$u(t) \leq Ce^{\left|\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right|} \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Tip

Pokud platí předpoklady Lemma 2.1 a $C = 0$, potom $u(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$.

2.1 Existence a jednoznačnost řešení

Lemma 2.2. *Nechť funkce $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ jsou definované a* ***spojité*** *na $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, pak $\boldsymbol{\varphi}$ je řešení (11) na nějakém intervalu $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ a $t_0 \in \mathcal{J}^o$* ***právě tehdy, když*** *platí*

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}(s) + \boldsymbol{b}(s))\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in \mathcal{J}, t_0 \in \mathcal{J}^o.$$

Teorém 2.1 (Globální existence a jednoznačnost řešení)**.** *Nechť daná maticová funkce $\boldsymbol{A}$ a vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ jsou definované a* ***spojité*** *na $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Potom (11) má pro každé $t_0 \in \mathcal{I}$ a každé $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ právě jedno řešení $\boldsymbol{\varphi}$, které existuje na celém $\mathcal{I}$. Toto řešení je možné vyjádřit jako limitní funkci tzv.* ***Picardovy posloupnosti postupných aproximací*** *$\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí, že $\boldsymbol{\varphi}_k$ je* ***spojitá*** *na $\mathcal{I}$ a*

$$\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \big(\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_k(s) + \boldsymbol{b}(s)\big)\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}$$

a řešení $\boldsymbol{\varphi}(t) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\varphi}_k(t)$ pro každé $t \in \mathcal{I}$.

2.2 Řešení homogenního systému

Uvažujme nyní homogenní systém

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{12}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je $n \times n$ maticová funkce **spojitá** na $\mathcal{I}$.

Teorém 2.2 (Struktura množiny řešení homogenního systému)**.** *Množina všech řešení rovnice (12) na intervalu $\mathcal{I}$ tvoří* ***lineární (vektorový) prostor*** *nad tělesem reálných čísel.*

Definice 2.1 (Lineární nezávislost vektorových funkcí)**.** Nechť $k, n \in \mathbb{N}$ jsou dané a nechť $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$, označme $\boldsymbol{X}(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \dots, \boldsymbol{x}_k(t))$, jsou n-vektorové funkce definované na *nedegenerovaném* intervalu $\mathcal{I}$. Řekneme, že funkce $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ jsou **lineárně závislé** na $\mathcal{I}$, pokud existuje **nenulová** k-tice reálných čísel $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_k)$ taková, že

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{X}(t) \rangle = c_1 \boldsymbol{x}_1(t) + \cdots + c_k \boldsymbol{x}_k(t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

V opačném případě se funkce $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ označují jako **lineárně nezávislé** na $\mathcal{I}$.

Teorém 2.3 (Lineární nezávislost řešení homogenního systému)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a nechť $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ jsou **úplné** řešení systému (12) na intervalu $\mathcal{I}$. Potom funkce $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ jsou **lineárně závislé*** právě tehdy, když *pro nějaký bod $t_0 \in \mathcal{I}$ jsou vektory $\boldsymbol{x}_1(t_0), \dots, \boldsymbol{x}_k(t_0)$ **lineárně závislé**.*

! Dimenze prostoru řešení homogenního systému

Množina řešení rovnice (12) na intervalu $\mathcal{I}$ tvoří **lineární prostor** dimenze n.

Definice 2.2 (Fundamentální systém řešení homogenního systému)**.** Libovolná báze prostoru všech řešení rovnice (12) na intervalu $\mathcal{I}$ se nazývá **fundamentální systém řešení** rovnice (12) na $\mathcal{I}$.

Dále budeme k rovnici (12) uvažovat ještě maticovou rovnici

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{13}$$

pro jejíž řešení $\boldsymbol{X}$ jistě platí, že i $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{C}$ je také řešení, je-li $\boldsymbol{C}$ konstantní vektor. Dále se maticové řešení $\boldsymbol{X}$ nazývá **fundamentální matice**, pokud sloupce vytvářejí fundamentální systém řešení rovnice (12). Jistě totiž má $\boldsymbol{X}(t)$ tvar

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{x}_1(t) & \boldsymbol{x}_2(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ jsou řešení (12). Pokud tedy sloupce $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ matice $\boldsymbol{X}$ tvoří bázi řešení rovnice (12), pak je $\boldsymbol{X}$ fundamentální matice systému (12). Jinak řečeno, $\boldsymbol{X}(t)$ tvoří fundamentální řešení **právě tehdy, když** $\det \boldsymbol{X}(t) \neq 0$ pro každé $t \in \mathcal{I}$, tj. $\boldsymbol{X}(t)$ je regulární na celém $\mathcal{I}$.

Teorém 2.4 (Liouvilleův-Jacobiho-Abelův-Ostrogradského vzorec)**.** *Nechť $\boldsymbol{X}$ je maticové řešení (13) na intervalu $\mathcal{I}$ a nechť $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod. Potom pro každé $t \in \mathcal{I}$ platí vzorec*

$$\det \boldsymbol{X}(t) = \det \boldsymbol{X}(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}(s) \mathrm{d}s},$$

*kde $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ je **stopa** matice $\boldsymbol{A}$.*

Teorém 2.5. *Nechť pro $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\boldsymbol{A}$ **spojitá** maticová funkce na intervalu $\mathcal{I} = [\alpha, \infty)$ taková, že $\int_{\alpha}^{\infty} \|\boldsymbol{A}(s)\| \,\mathrm{d}s < \infty$ pro nějakou maticovou normu $\|\cdot\|$. Nechť $\{\boldsymbol{X}_k\}_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost maticových funkcí rekurentním předpisem*

$$\boldsymbol{X}_0(t) \equiv \boldsymbol{I}_n, \quad \boldsymbol{X}_{k+1}(t) = \int_t^{\infty} \boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{X}_k(s) \mathrm{d}s$$

pro $t \in \mathscr{I}, k \in \mathbb{N}_0$. Potom pro každý konstantní vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ je nekonečná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \boldsymbol{X}_k(t) \cdot \boldsymbol{c}$$

***absolutně a rovnoměrně** konvergentní na intervalu $\mathscr{I}$ a funkce $\boldsymbol{x}$ definovaná*

$$\boldsymbol{x}(t) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \boldsymbol{X}_k(t) \cdot \boldsymbol{c}$$

*pro $t \in \mathscr{I}$ je **úplným** řešením systému (12) na $\mathscr{I}$. Navíc platí $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}$.*

2.3 Nehomogenní systémy rovnic

Teorém 2.6 (Struktura množiny řešení nehomogenního systému)**.** *Nechť funkce $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou **spojité** na intervalu $\mathscr{I} \subseteq \mathbb{R}$. Nechť $\boldsymbol{X}$ je fundamentální matice systému (12) a nechť $\boldsymbol{x}_0$ je nějaké řešení (10) na $\mathscr{I}$. Potom vektorová funkce $\boldsymbol{x}$ je **úplným** řešením nehomogenního systému (10) na $\mathscr{I}$ právě tehdy, když pro nějaký konstantní vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{x}_0(t) \quad \forall t \in \mathscr{I}.$$

Z Teorém 2.6 zjevně plyne, že všeobecné řešení systému (10) můžeme psát jakou **součet všeobecného řešení systému (12) a partikulárního řešení (10)**.

Teorém 2.7 (Metoda variace konstant)**.** *Počáteční úloha (11) má jediné řešení tvaru*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{X}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s,$$

kde $\boldsymbol{X}$ je libovolná fundamentální matice *systému (12).*

2.4 Systémy s konstantními koeficienty

Dále se budeme zabývat zjednodušeným případem, kdy je v rovnici (12) matice $\boldsymbol{A}$ konstantní, tj.

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t). \tag{14}$$

Zřejmě je každé řešení **úplné** a definovaném na celém $\mathbb{R}$. Dále ještě pro **čtvercovou komplexní** matici $\boldsymbol{M}$ definujme **exponenciálu matice** jako

$$e^{\boldsymbol{M}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\boldsymbol{M}^k,$$

přičemž tato nekonečná řada konverguje **absolutně** pro každou matici $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, protože řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|\boldsymbol{M}\|^k$ je konvergentní vzhledem k **libovolné maticové** normě.

Teorém 2.8 (Fundamentální matice homogenního systému)**.** *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je* ***čtvercová konstantní reálná*** *matice řádu n. Potom exponenciála* $e^{\boldsymbol{A}t}$ *je* ***fundamentální matice*** *systému (14) na celém* $\mathbb{R}$.

Dále byl představen **Jordanův kanonický tvar**.

Teorém 2.9 (Fundamentální matice systému)**.** *Každá fundamentální matice* $\boldsymbol{X}$ *systému (14) má tvar*

$$x_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{l} \left(p_k(t) \cos\left(t \cdot \mathrm{Im}(\lambda_k)\right) + r_k(t) \sin\left(t \cdot \mathrm{Im}(\lambda_k)\right)\right) e^{t \cdot \mathrm{Re}(\lambda_k)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde indexy $i, j = 1, \dots, n$*, hodnoty* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *jsou navzájem různá vlastní čísla matice* $\boldsymbol{A}$ *a funkce* p_k *a* r_k *jsou reálné polynomy stupně* ***menšího*** *než je* algebraická násobnost *vlastního čísla* λ_k*, opět pro* $k = 1, \dots, n$.

Důsledek 2.1. *Nechť* $\boldsymbol{X}$ *je fundamentální matice systému (14). Potom*

1. *matice* $\boldsymbol{X}$ *je* ***ohraničená*** *na okolí* ∞ *právě tehdy, když každé vlastní číslo matice* $\boldsymbol{A}$ *má* ***nekladnou*** *reálnou část a vlastní čísla s* ***nulovou*** *reálnou části jsou* ***jednoduchá****;*
2. *platí* $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}_n$ *právě tehdy, když každé vlastní číslo matice* $\boldsymbol{A}$ *má* ***zápornou*** *reálnou část.*

2.4.1 Putzerův algoritmus

Teorém 2.10 (Cayleho-Hamiltonova)**.** *Každá matice* $\boldsymbol{C} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je kořenem svého* ***charakteristického polynomu****, tj. pokud* $p(\lambda)$ *je charakteristický polynom matice* $\boldsymbol{M}$*, potom platí* $p(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{O}_n$.

Teorém 2.11 (Putzerův algoritmus)**.** *Nechť funkce*

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0$$

je normovaný charakteristický polynom konstantní matice $\boldsymbol{A}$ *a nechť (skalární) funkce x je řešením úlohy*

$$\begin{gathered} x^{(n)} + d_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + d_1 x' + d_0 x = 0, \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1. \end{gathered}$$

Definujme vektorovou funkci $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ *předpisem*

$$\boldsymbol{y}(t) := \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n-1} & 1 \\ d_2 & d_3 & d_4 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ d_{n-2} & d_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ d_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-3)}(t) \\ x^{(n-2)}(t) \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Potom pro exponenciálu $e^{\boldsymbol{A}t}$ *platí*

$$e^{\boldsymbol{A}t} = y_1(t)\boldsymbol{I}_n + y_2(t)\boldsymbol{A} + \cdots + y_n(t)\boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Teorém 2.12 (Putzerův algoritmus)**.** *Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je daná matice a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ systém všech jejích (ne nutně různých) vlastních čísel. Potom exponenciála $e^{\boldsymbol{A}t}$ splňuje*

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(t)\boldsymbol{M}_k, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $n \times n$ matice $\boldsymbol{M}_k$ pro $k = 0, \dots, n-1$ jsou definované předpisem

$$\boldsymbol{M}_0 := \boldsymbol{I}_n, \quad \boldsymbol{M}_k := \prod_{j=1}^{k}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{I}_n), \quad k = 1, \dots, n,$$

a vektorová funkce $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$ je řešením počáteční úlohy

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Metoda (zobecněných) vlastních vektorů

Teorém 2.13. *Nechť je $\lambda \in \mathbb{C}$ nějaké vlastní číslo dané matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dále nechť $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p \in \mathbb{C}^n$ je nějaký soubor* ***lineárně nezávislých*** *vektorů, které odpovídají vlastnímu číslu λ. Potom vektorové funkce*

$$\boldsymbol{x}_j(t) := e^{\lambda t}\boldsymbol{v}_j, \quad j = 1, \dots, p,$$

jsou ***lineárně nezávislé*** *řešení systému (14) na celé reálné ose $\mathbb{R}$. Dále, pokud je $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ nějaké další vlastní číslo matice* $\boldsymbol{A}$ ***různé*** *od λ a $\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{v}}_r \in \mathbb{C}^n$ je nějaký soubor* ***lineárně nezávislých vektorů****, které odpovídají vlastnímu číslu $\tilde{\lambda}$, potom jsou funkce*

$$e^{\lambda t}\boldsymbol{v}_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad e^{\tilde{\lambda} t}\tilde{\boldsymbol{v}}_k, \quad k = 1, \dots, r$$

lineárně nezávislé*.*

Ve zkratce připomeňme, že **algebraická násobnost** $\mu_{\mathrm{A}}(\lambda)$ vlastního čísla λ matice $\boldsymbol{A}$ se označuje násobnost λ jako kořene charakteristického polynomu. Dále maximální počet lineárně nezávislých vlastních vektorů, tj. dimenze prostor, který generují všechny vlastní vektory příslušné tomuto vlastnímu číslu, označujeme jako **geometrická násobnost** a značíme ji $\mu_{\mathrm{G}}(\lambda)$. Ve všeobecnosti navíc platí

$$1 \leq \mu_{\mathrm{G}}(\lambda) \leq \mu_{\mathrm{A}}(\lambda).$$

Definice 2.3 (Zobecněný vlastní vektor)**.** Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová komplexní matice řádu $n \times n$ a nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je nějaké její vlastní číslo. Pro dané $r \in \mathbb{N}$ se vektor $\boldsymbol{v}_r \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ se nazývá **zobecněný vlastní vektor řádu** r matice $\boldsymbol{A}$, který přísluší vlastnímu číslu λ, pokud platí

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^r \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0} \quad \wedge \quad (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^{r-1} \boldsymbol{v}_r \neq \boldsymbol{0}.$$

Pokud je $\boldsymbol{v}_r$ zobecněný vlastní vektor řádu r matice $\boldsymbol{A}$ příslušící vlastnímu číslu λ, potom konečná posloupnost vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ definovaných jako

$$\boldsymbol{v}_j := (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^{r-j} \boldsymbol{v}_r, \quad j = 1, \dots, r, \tag{15}$$

se nazývá **řetězec řádu r zobecněných vlastních vektorů** matice $\boldsymbol{A}$, který je generovaný vlastním vektorem $\boldsymbol{v}_r$.

Lemma 2.3. *Systém vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ definovaný v (15) je **lineárně nezávislý**. Jinými slovy, každý řetězec zobecněných vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, který přísluší jejímu vlastnímu číslu λ, je tvořenými* lineárně nezávislými *vektory.*

Teorém 2.14. *Nechť je $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ nějaký řetězec řádu r, definovaný v (15), zobecněných vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, který přísluší vlastnímu číslu λ, potom vektorové funkce*

$$\boldsymbol{x}_j(t) := e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} \boldsymbol{v}_{j-k}, \quad j = 1, \dots, r$$

*jsou **lineárně nezávislá** řešení systému (14) na celém $\mathbb{R}$.*

2.4.3 Weyrova teorie charakteristických čísel

Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu n a nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je nějaké její vlastní číslo s algebraickou násobností $\mu_{\mathrm{A}}(\lambda)$. Nechť

$$\left\{\boldsymbol{v}_1^{[j]}, \dots, \boldsymbol{v}_{r_j}^{[j]}\right\}, \quad j = 1, \dots, q \tag{16}$$

je nějaký soubor řetězců zobecněných vlastních čísel. Položme $R := \max\left\{r_1, \dots, r_q\right\}$. Říkáme, že řetězce v (16) jsou **disjunktní**, pokud pro každý index $k \in \{1, \dots, R\}$ je systém všech možných vektorů

$$\boldsymbol{v}_k^{[1]}, \boldsymbol{v}_k^{[2]}, \dots, \boldsymbol{v}_k^{[q-1]}, \boldsymbol{v}_k^{[q]}$$

lineárně nezávislý, což se stane právě v případě, že jsou vektory $\boldsymbol{v}_1^{[1]}, \dots, \boldsymbol{v}_1^{[q]}$ lineárně nezávislé. Pod **nulitou (defektem)** matice budeme dále označovat dimenzi jejího jádra, tj. v našem kontextu budeme psát

$$\nu_l := \operatorname{nullity}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^l := \dim \ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^l, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Teorém 2.15. *Pro dané vlastní číslo λ matice $\boldsymbol{A}$ existuje **nejmenší** $L \in \mathbb{N}$ takové, že*

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_{L-1} < \nu_L$$

a $\nu_l = \nu_L$ pro každé $l \geq L$. Navíc platí $\nu_L = \mu_{\mathrm{A}}(\lambda)$, kde $\mu_{\mathrm{A}}(\lambda)$ je algebraická násobnost *vlastního čísla λ.*

Definice 2.4 (Weyrovy charakteristiky)**.** Pro dané vlastní číslo λ matice $\boldsymbol{A}$ se *přirozená čísla*

$$\sigma_l := \nu_l - \nu_{l-1}, \quad l = 1, \dots, L$$

označují jako **Weyrovy charakteristiky** *(charakteristická čísla)* matice $\boldsymbol{A}$, které přísluší vlastnímu číslu λ.

Lemma 2.4. *Pro dané vlastní číslo λ matice $\boldsymbol{A}$ platí rovnost*

$$\operatorname{nullity}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^l - \operatorname{nullity}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^{l-1} = \dim\left[\operatorname{im}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^{l-1} \cap \ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\right]$$

pro každé $l = 1, \dots, L$. Obzvlášť, Weyrovy charakteristiky σ_l splňují

$$\sigma_l = \dim\left[\operatorname{im}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)^{l-1} \cap \ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\right], \quad l = 1, \dots, L.$$

Teorém 2.16. *Pro dané vlastní číslo λ matice $\boldsymbol{A}$ je hodnota*

$$L := \max\{q_j\},$$

kde q_j jsou rozměry bloků Jordanova kanonického tvaru matice $\boldsymbol{A}$ s vlastním číslem λ, ***délka nejdelšího řetězce*** *zobecněných vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, který odpovídá vlastnímu číslu λ. Pro každé $l = 1, \dots, L$ je maximální počet disjunktních řetězců zobecněných vlastních vektorů délky l roven hodnotě σ_l.*

Teorém 2.17. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu n a $\lambda \in \mathbb{C}$ je její vlastní číslo s algebraickou násobností $\mu_{\mathrm{A}}(\lambda)$. Potom existuje právě $\mu_{\mathrm{A}}(\lambda)$ lineárně nezávislých zobecněných vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, které přísluší vlastnímu číslu λ. Tyto vektory se dají rozdělit do $\sigma_1 = \nu_1 = \operatorname{nullity}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$ disjunktních řetězců.*

2.5 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dané přirozené číslo. Diferenciální rovnice

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = f(t), \tag{17}$$

kde f a p_k, pro $k = 0, \dots, n-1$, jsou **reálné skalární** funkce definované a **spojité** na daném intervalu $\mathscr{I} \subseteq \mathbb{R}$, se nazývá **lineární diferenciální rovnice** n**-tého řádu**. Pokud $f \equiv 0$ na celém intervalu $\mathscr{I}$, hovoříme o **homogenní LDR** n**-tého řádu**, tj.

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0. \tag{18}$$

Levou stranu rovnice (17) často označujeme výrazem $\mathsf{L}y$, kde $\mathsf{L} : C^n(\mathscr{I}) \to C(\mathscr{I})$ je **lineární diferenciální operátor** n**-tého řádu**.

Úplným řešení rovnice $\mathsf{L}y = f(t)$ na intervalu $\mathscr{I}$ se rozumí funkce $\psi \in C^n(\mathscr{I})$, která identicky splňuje rovnici (17) na intervalu $\mathscr{I}$. **Počáteční (Cauchyho) úlohou** se označuje systém podmínek

$$\mathsf{L}y = f(t), \quad y(t_0) = \eta_1, \quad y'(t_0) = \eta_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \eta_n, \tag{19}$$

kde $t_0 \in \mathscr{I}$ je daný bod (*časový okamžik*) a $\eta_1, \dots, \eta_n$ jsou dané reálné konstanty.

Teorém 2.18 (Převod na lineární systém)**.** *Nechť $\mathscr{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a t_0 daný bod. Dále nechť funkce ψ je (úplné) řešení počáteční úlohy (19) na intervalu $\mathscr{I}$. Položme*

$$\varphi_1(t) := \psi(t), \quad \varphi_2(t) := \psi'(t), \quad \dots, \quad \varphi_n(t) := \psi^{(n-1)}(t), \quad t \in \mathscr{I}.$$

Potom vektorová funkce $\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top$ je (úplným) řešením počáteční úlohy (10) na $\mathscr{I}$ s maticovou funkcí $\boldsymbol{A}$ a vektorovou funkcí $\boldsymbol{b}$ tvaru

$$\boldsymbol{A}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \cdots & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

které splňuje počáteční podmínku $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta} := (\eta_1, \dots, \eta_n)^\top$. Naopak, pro každé (úplné) řešení $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top$ systému (20) na $\mathscr{I}$, které splňuje počáteční úlohu $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)^\top$, je jeho první složka φ_1 (úplným) řešení počáteční úlohy (19) na celém $\mathscr{I}$.

Teorém 2.19 (Existence a jednoznačnost)**.** *Nechť $\mathscr{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval, $t_0 \in \mathscr{I}$ daný bod a $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}$ dané konstanty. Dále nechť f a p_k, pro $k = 0, \dots, n-1$, jsou* ***reálné*** *funkce definované a* ***spojité*** *na $\mathscr{I}$. Potom počáteční úloha (19) má právě jedno* ***úplné*** *řešení na celém $\mathscr{I}$.*

2.5.1 Wronskián a lineární nezávislost funkcí

Definice 2.5. Nechť $u_1, \dots, u_n$ je systém *skalárních* funkcí, které mají na daném intervalu $\mathscr{I}$ **spojité všechny** derivace až do řádu $n-1$ *včetně*. Čtvercová matice

$$\boldsymbol{X}(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathscr{I},$$

se nazývá **Wronského matice** systému $u_1, \dots, u_n$ na intervalu $\mathscr{I}$ a její determinant

$$\mathscr{W}[u_1, \dots, u_n](t) := \det \boldsymbol{X}(t), \quad t \in \mathscr{I}, \tag{21}$$

se označuje jako **wronskián** funkcí $u_1, \dots, u_n$ na $\mathscr{I}$.

Teorém 2.20. *Nechť jsou splněny předpoklady Definice 2.5. Pokud existuje takové $t_0 \in \mathscr{I}$, že wronskián $\mathscr{W}[u_1, \dots, u_n](t_0) \neq 0$, potom jsou funkce $u_1, \dots, u_n$* ***lineárně nezávislé*** *na intervalu $\mathscr{I}$.*

Teorém 2.21 (Liouvilleův-Jacobiho-Abelův-Ostrogradského vzorec)**.** *Nechť $\mathscr{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a $t_0 \in \mathscr{I}$ daný bod. Pro každou n-tici řešení $y_1, \dots, y_n$ homogenní lineární rovnice (18) platí pro jejich odpovídající wronskián $\mathscr{W}[y_1, \dots, y_n]$ z (21) vztah*

$$\mathscr{W}[y_1, \dots, y_n](t) = \mathscr{W}[y_1, \dots, y_n](t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} p_{n-1}(s) \mathrm{d}s}, \quad t \in \mathscr{I}.$$

! Lineární závislost/nezávislost řešení

Řešení $y_1, \dots, y_n$ homogenní rovnice (18) jsou **lineárně nezávislá** na intervalu $\mathcal{I}$ právě tehdy, když je jejich odpovídající wronskián $\mathscr{W}[y_1, \dots, y_n]$ **nenulový** na celém $\mathcal{I}$. Podobně, řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice (18) jsou **lineárně závislé** právě tehdy, když je jejich wronskián $\mathscr{W}[y_1, \dots, y_n](t) = 0$ pro každé $t \in \mathcal{I}$.

2.5.2 Snížení řádu homogenní rovnice

Teorém 2.22. *Nechť je funkce ψ (úplné) řešení homogenní lineární rovnice (18) na intervalu $\mathcal{I}$, přičemž $\psi(t) \neq 0$ pro každé $t \in \mathcal{I}$. Definujme funkci*

$$z(t) := \left(\frac{y(t)}{\psi(t)}\right)', \quad t \in \mathcal{I}. \tag{22}$$

Pokud je funkce y (úplným) řešenímm rovnice (18) na $\mathcal{I}$, potom funkce z v (22) je (úplným) řešením jisté homogenní lineární difereciální rovnice řádu $n-1$ se spojitými koeficienty na intervalu $\mathcal{I}$.

2.5.3 Metoda variace konstant – nehomogenní rovnice

Teorém 2.23 (Metoda variace konstant)**.** *Nechť $y_1, \dots, y_n$ je **fundamentální systém** řešení homogenní rovnice (18) na intervalu $\mathcal{I}$. Potom funkce y je (úplné) řešení lineární rovnice (17) na intervalu $\mathcal{I}$ právě tehdy, když platí*

$$y(t) = \left\langle \boldsymbol{c}(t), \overbrace{(y_1(t), \dots, y_n(t))}^{\boldsymbol{y}(t)} \right\rangle = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n(t) y_n(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

kde $c_1, \dots, c_n \in C^1(\mathcal{I})$ splňující

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}.$$

2.5.4 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Nyní se budeme věnovat speciálnímu případu homogenní rovnice (18) s **konstantními koeficienty**, tj. funkce p_k pro $k = 0, \dots, n-1$ budou konstantní.

Teorém 2.24 (Fundamentální systém řešení)**.** *Nechť p_k, pro $k = 0, \dots, n-1$, v (18) jsou **konstantní** funkce. Uvažujme tzv. **charakteristický polynom***

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 \tag{23}$$

*rovnice (18). Pokud $\mu \in \mathbb{C}$ je m-násobný kořen polynomu p v (23), potom funkce $t^l e^{\mu t}$, $l = 0, \dots, m-1$, jsou **lineárně nezávislé** řešení rovnice (18) na celém $\mathbb{R}$.*

3 Systémy nelineárních diferenciálních rovnic

3.1 Systém diferenciálních rovnic

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevně zvolené číslo. Soubor rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

kde $f_k(t, x_1, \dots, x_n)$ s $k = 1, \dots, n$ jsou reálné funkce definované na dané množině $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a znak $'$ znamená $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Tento systém můžeme přepsat do vektorového tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{24}$$

Řešením systému (24) rozumíme každou n-vektorovou funkci $\boldsymbol{\varphi}(t)$ definovanou a **diferencovatelnou** na nějakém podintervalu $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou $[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] \in M$ a $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ pro každé $t \in \mathcal{J}$. Opět mějme **počáteční (Cauchyho) úlohu**

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}, \tag{25}$$

kde $t_0 \in \mathbb{R}$ je daný bod a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ daný vektor tak, že $[t_0, \boldsymbol{\eta}] \in M$. Říkáme, že počáteční úloha (25) je **jednoznačná**, pokud pro každé dvě řešení $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ úlohy (25), které existují na intervalech $\mathcal{I}_{\boldsymbol{x}}$ a $\mathcal{I}_{\boldsymbol{y}}$, existuje $\delta > 0$ s vlastností

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}_{\boldsymbol{x}} \cap \mathcal{I}_{\boldsymbol{y}} \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Lemma 3.1. *Nechť je daná $(n+1)$-vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ **spojitá** na množině $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Potom n-vektorová funkce $\boldsymbol{\varphi}$ je řešení počáteční úlohy (25) na nějakém intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$* právě tehdy, když *platí*

$$[t, \boldsymbol{\varphi}(t)] \in M \quad \& \quad \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{\varphi}(s)) \mathrm{d}s$$

pro každé $t \in \mathcal{I}$.

3.2 Existence a jednoznačnost řešení

Nechť $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný **kompaktní** interval a $\mathcal{A}$ daná množina funkcí **spojitých** na $\mathcal{I}$. Připomeňme, že funkce z $\mathcal{A}$ se označují jako **stejnoměrně ohraničené** na $\mathcal{I}$, pokud existuje konstanta $K > 0$ s vlastností

$$\|\boldsymbol{f}(t)\| \leq K \quad \forall t \in \mathcal{I} \ \forall \boldsymbol{f} \in \mathcal{A}. \tag{26}$$

Podobně, funkce z $\mathcal{A}$ se nazývají **stejně spojité** (*rovnako spojité*) na intervalu $\mathcal{I}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností, že pokud pro body $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ platí

$$|t_2 - t_1| < \delta \implies \|\boldsymbol{f}(t_2) - \boldsymbol{f}(t_1)\| < \varepsilon \quad \forall \boldsymbol{f} \in \mathcal{A}. \tag{27}$$

Teorém 3.1 (Arzelàova–Ascoliho)**.** *Pro množinu $\mathscr{A}$ funkcí **spojitých** na **kompaktním** intervalu $\mathscr{I}$ platí, že každá posloupnost $\{\boldsymbol{f}_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ obsahuje podposloupnost $\{\boldsymbol{f}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ **stejnoměrně konvergentní** na $\mathscr{I}$* právě tehdy, když *funkce z množiny $\mathscr{A}$ splňují podmínky (26) a (27). Množina $\mathscr{A}$ se potom označuje jako **relativně kompaktní** v prostoru funkcí* spojitých na kompaktním *intervalu $\mathscr{I}$.*

Teorém 3.2 (Peanova)**.** *Nechť a, b jsou dané kladné reálné čísla a nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ je daný bod a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ daný vektor. Definujme množiny*

$$\mathscr{I} := [t_0, t_0 + a], \quad B[\boldsymbol{\eta}, b] := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n; \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}\| \leq b\}.$$

*Nechť $f : \mathscr{I} \times B[\boldsymbol{\eta}, b] \to \mathbb{R}^n$ je daná **spojitá** a **identicky nenulová** funkce. Označme*

$$m := \max_{[t,\boldsymbol{y}] \in \mathscr{I} \times B[\boldsymbol{\eta}, b]} \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\|.$$

*Potom má počáteční úloha (25) **alespoň jedno řešení**, které existuje na intervalu $\mathscr{J} := [t_0, t_0 + \alpha]$, kde číslo $\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{m}\right\}$.*

Definice 3.1 (Lipschitzovská a kontraktivní funkce)**.** Nechť $\mathscr{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ daná množina. Říkáme, že funkce $f : \mathscr{I} \times D \to \mathbb{R}^n$ je **lipschitzovská**, resp. splňuje **Lipschitzovu podmínku** vzhledem na proměnnou $\boldsymbol{x} \in D$, pokud existuje $L \geq 0$ s vlastností

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \leq L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \quad \forall [t, \boldsymbol{x}], [t, \boldsymbol{y}] \in \mathscr{I} \times D.$$

Číslo L se potom označuje jako **Lipschitzova konstanta** funkce $\boldsymbol{f}$. Obzvlášť, v případě že $L < 1$ říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ je **kontrakce**.

Teorém 3.3 (Picardova–Lindelöfova)**.** *Nechť platí předpoklady a označení Teorém 3.2. Nechť je navíc funkce **$\boldsymbol{f}$ lipschitzovská** vzhledem k proměnné $\boldsymbol{x}$ na množině $\mathscr{I} \times D$. Potom počáteční úloha (25) má **právě jedno řešení**, které existuje na intervalu $[t_0, t_0 + \alpha]$.*

V moderní teorii diferenciálních rovnic se využívají výsledky z **funkcionální analýzy**, např. **věty o pevných bodech**.

Teorém 3.4 (Banachova o pevném bodě)**.** *Nechť (X, ρ) je **(neprázdný) úplný metrický** prostor. Potom každé **kontraktivní** zobrazení $T : X \to X$ má **právě jeden** pevný bod v X.*

Teorém 3.5 (Schauderova o pevném bodě)**.** *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je **normovaný lineární** prostor na $\mathbb{R}$, $\mathscr{A} \subseteq X$ **neprázdná uzavřená konvexní** množina $T : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ **spojité** zobrazení. Pokud je obraz $T(\mathscr{A})$ množině **relativně kompaktní** v X, viz Teorém 3.1, potom má zobrazení T **alespoň jeden pevný bod** v $\mathscr{A}$.*

Tyto výsledky Teorém 3.4 a Teorém 3.5 lze pak použít na alternativní důkazy Teorém 3.2 a Teorém 3.3, přičemž u důkazu Teorém 3.3 dostaneme tzv. **Picardovu posloupnost postupných aproximací** $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, která je definovaná induktivně předpisem

$$\boldsymbol{x}_{k+1}(t) = [T\boldsymbol{x}_k](t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s)) \mathrm{d}s,$$

přičemž $\boldsymbol{x}_1$ je **libovolná spojitá** n-vektorová funkce na $\mathscr{J} = [t_0, t_0 + \alpha]$, která splňuje $\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\eta}\| \leq b$ ve vhodné normě určené v důkazu.

Tip

Poznamenejme, že v případě, kdy má funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ **ohraničené parciální derivace** podle proměnné $\boldsymbol{x}$ na **konvexní oblasti** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, potom je $\boldsymbol{f}$ **lipschitzovská** na množině Ω vzhledem k proměnné $\boldsymbol{x}$.

3.2.1 Globální jednoznačnost řešení

Definice 3.2 (Lokálně lipschitzovská funkce)**.** Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná **otevřená** množina. Říkáme, že $(n+1)$-vektorová funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je **lokálně lipschitzovská** na Ω vzhledem na proměnnou $\boldsymbol{x}$, pokud pro každý pod $[t_0, \boldsymbol{\eta}] \in \Omega$ existuje okolí $\mathcal{O}(t_0, \boldsymbol{\eta}) \subseteq \Omega$ a **nezáporné reálné** číslo $L(t_0, \boldsymbol{\eta})$ s vlastností

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{v})\| \leq L(t_0, \boldsymbol{\eta}) \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \quad \forall [t, \boldsymbol{u}], [t, \boldsymbol{v}] \in \mathcal{O}(t_0, \boldsymbol{\eta}).$$

Číslo $L(t_0, \boldsymbol{\eta})$ se označuje jako **lokální Lipschitzova konstanta** funkce $\boldsymbol{f}$ na Ω.

Teorém 3.6 (Globální jednoznačnost úplného řešení)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná konvexní oblast a $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je **spojitá** a **lokálně lipschitzovská** funkce na Ω vzhledem na proměnnou $\boldsymbol{x}$. Potom každé **úplné** řešení rovnice (24) je určené **jednoznačně**. Přesněji, každým bodem $[t_0, \boldsymbol{\eta}] \in \Omega$ prochází **právě jedna** integrální křivka rovnice (24).*

3.3 Problém prodlužování řešení

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná **oblast** a vektorová funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je **spojitá**. Připomeňme, že pokud jsou $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ dvě řešení systému (24), které jsou definované na reálných intervalech $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\varphi}}$ a $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\psi}}$, potom říkáme, že řešení $\boldsymbol{\psi}$ je **prodloužení** řešení $\boldsymbol{\varphi}$ (resp. řešení $\boldsymbol{\varphi}$ je **zúžení** řešení $\boldsymbol{\psi}$), pokud platí

$$\overline{\mathcal{I}_{\boldsymbol{\varphi}}} \subsetneq \mathcal{I}_{\boldsymbol{\psi}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) \ \forall t \in \mathcal{I}_{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Definice 3.3 (Úplné řešení)**.** Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná oblast a $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je **spojitá** vektorová funkce. Řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) se označuje jako **úplné**, pokud *není* zúžením žádného jiného řešení rovnice (24). Přesněji, řešení $\boldsymbol{\varphi}$ je ω-**úplné**, pokud je **neprodloužitelné napravo**, a α-**úplné**, pokud je **neprodloužitelné nalevo**.

Je možné ukázat, že je-li definičním oborem funkce $\boldsymbol{f}$ **oblast** Ω, pak je každé úplné řešení (24) definované na maximálním **otevřeném** intervalu.

Lemma 3.2. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná oblast a $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je **spojitá** vektorová funkce. Nechť pro daný bod $[t_0, \boldsymbol{\eta}] \in \Omega$ je $\boldsymbol{\varphi}$ nějaké řešení počáteční úlohy (25), které existuje na **ohraničeném** intervalu $[t_0, T)$. Potom řešení $\boldsymbol{\varphi}$ je **prodloužitelné napravo** od bodu T právě tehdy, když jeho graf $G_{\boldsymbol{\varphi}} := \{[t, \boldsymbol{\varphi}(t)]; t \in [t_0, T)\} \subseteq \Omega$ je **ohraničený** v $\mathbb{R}^{n+1}$ a má **kladnou** vzdálenost od hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω.*

Teorém 3.7 (Existence úplného řešení)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast a $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je **spojitá** vektorová funkce. Potom každé řešení rovnice (24) je buď **úplné** nebo se dá **prodloužit** na úplné řešení.*

Tip

Z důkazu Teorém 3.7 vyplývá, že řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) existující na intervalu $[t_0, T)$ je ω-úplné právě tehdy, když nastává alespoň jedna z následujících možností:

1. bod $T = \infty$;
2. existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T)$ s $\lim_{k\to\infty} t_k = T$, která splňuje
$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{\varphi}(t_k)\| = \infty;$$
3. existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T)$ s $\lim_{k\to\infty} t_k = T$, která splňuje
$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}\left([t_k, \boldsymbol{\varphi}(t_k)], \partial\Omega\right) = 0.$$

Definice 3.4 (Limitní bod řešení)**.** Nechť vektorová funkce $\boldsymbol{\varphi}$ je **úplné** řešení systému (24), které existuje na intervalu (S, T) s $-\infty \le S < T \le \infty$. Říkáme, že bod $[S, \boldsymbol{\eta}], \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$, je **levým limitním bodem** řešení $\boldsymbol{\varphi}$, pokud $S > -\infty$ a existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq (S, T)$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} t_k = S^+ \quad \wedge \quad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(t_k) = \boldsymbol{\eta}.$$

Obdobně pro **pravý limitní bod**, přičemž **limitním bodem** rozumíme buď pravý nebo levý limitní bod.

Teorém 3.8 (Limitní bod úplného řešení)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast a $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je* ***spojitá*** *funkce. Potom každý limitní bod libovolného* ***úplného*** *řešení rovnice (24) leží* ***na hranici*** *$\partial\Omega$ oblasti Ω.*

Tip

Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ je daný bod a $\mathscr{I} := [t_0, \infty)$ interval. Nechť $\boldsymbol{f} : \mathscr{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce, která je **spojitá** a **ohraničená** na celém svém definičním oboru. Potom každé ω-úplné řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24), které vychází z bodu $[t_0, \boldsymbol{\eta}], \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$, existuje **na celém intervalu** $\mathscr{I}$.

3.4 Závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech

Teorém 3.9. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast a nechť $\left\{\boldsymbol{f}_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí* ***spojitých*** *na Ω. Nechť dále $\left\{[t_k, \boldsymbol{\eta}_k]\right\}_{k=1}^{\infty}$ je daná posloupnost bodů. Předpokládejme, že $\left\{\boldsymbol{f}_k\right\}_{k=1}^{\infty}$* ***konverguje skoro stejnoměrně*** *k $\boldsymbol{f}$ na Ω a $[t_k, \boldsymbol{\eta}_k] \to [t_0, \boldsymbol{\eta}] \in \Omega$ pro $k \to \infty$, tj. $\boldsymbol{f}_k \rightrightarrows \boldsymbol{f}$ pro $k \to \infty$ na* ***každé kompaktní*** *podmnožině $K \subseteq \Omega$. Nechť $\left\{\boldsymbol{\varphi}_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost* ***úplných*** *řešení systému počátečních úloh*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}_k(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\eta}_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Potom existuje ***vybraná*** *podposloupnost $\left\{\boldsymbol{\varphi}_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \left\{\boldsymbol{\varphi}_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, která* ***stejnoměrně*** *konverguje k jistému řešení počáteční úlohy (25), tj.*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta}, \tag{28}$$

*na nějakém okolí bodu t_0. Pokud navíc úloha (28) má **jediné úplné** řešení $\boldsymbol{\varphi}$ definované na intervalu $\mathcal{I}$, potom celá posloupnost $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje **stejnoměrně** k funkci $\boldsymbol{\varphi}$ na **libovolném kompaktním** podintervalu $[a,b] \subset \mathcal{I}$ s $t_0 \in (a,b)$.*

Teorém 3.10 (Závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n+1}$ a nechť $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je **spojitá** vektorová funkce s vlastností, že pro každý bod $[\tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}] \in \mathbb{R}^{m+n+1}$, kde $\tau \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, má počáteční úloha*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\eta} \tag{29}$$

***právě jedno úplné** řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})$. Potom $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})$ je **spojitá** funkce proměnných $t, \tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}$ na množině*

$$D := \left\{[t, \tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}] \in \mathbb{R}^{m+n+2};\ [\tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}] \in \Omega,\ t \in \mathcal{I}(\tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})\right\},$$

*kde $\mathcal{I}(\tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})$ je interval, na kterém řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \tau, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})$ **existuje**.*

3.5 Diferenciální rovnice vyšších řádů

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je daný index a $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná množina. Budeme uvažovat **diferenciální rovnici n-tého řádu** tvaru

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{30}$$

kde $f : M \to \mathbb{R}$ je skalární funkce. Pod pojmem řešení rovnice (30) na intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme funkci φ, která má na $\mathcal{I}$ všechny derivace až do řádu n včetně a která splňuje

$$[t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)] \in M, \quad \varphi^{(n)} = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

pro každé $t \in \mathcal{I}$. Podobně jako bylo uvedeno výše definujeme i **úplné řešení**. Při řešení **počáteční (Cauchyho) úlohy** hledáme řešení rovnice (30), pro které je v daném bode $t_0 \in \mathbb{R}$ předpsaná hodnota prvních $n-1$ derivací, tj.

$$y^{(n)} f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(t_0) = \eta_0,\ y'(t_0) = \eta_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1}, \tag{31}$$

kde $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$ jsou dané hodnoty.

Teorém 3.11 (Převod na (nelineární) systém)**.** *Nechť $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a $t_0 \in \mathcal{I}$ daný bod. Nechť funkce ψ je* (úplné) *řešení počáteční úlohy (31) na intervalu $\mathcal{I}$. Položme*

$$\varphi_1(t) := \psi(t), \quad \varphi_2(t) := \psi'(t), \quad \dots, \quad \varphi_n(t) := \psi^{(n-1)}(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Potom vektorová funkce $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top$ je (úplným) *řešením* (nelineárního) *diferenciálního systému (24) na $\mathcal{I}$ tvaru*

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \tag{32}$$

které splňuje počáteční podmínku $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta} := (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})^\top$. Naopak pro každé (úplné) *řešení $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top$ systému (32) na $\mathcal{I}$, které splňuje počáteční podmínku $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})^\top$, je jeho první složka φ_1* (úplným) *řešení počáteční úlohy (31) na celém intervalu $\mathcal{I}$.*

Teorém 3.12 (Peanova)**.** *Nechť a, b jsou daná **kladná** reálná čísla, $t_0 \in \mathbb{R}$ je daný bod a $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$ dané konstanty. Definujme vektor $\boldsymbol{\eta} := (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})^\top$ a množiny*

$$\mathcal{I} := [t_0 - a, t_0 + a], \quad B[\boldsymbol{\eta}, b] := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\eta}\| \le b\}.$$

*Nechť $f : \mathcal{I} \times B[\boldsymbol{\eta}, b] \to \mathbb{R}$ je daná **spojitá** funkce. Potom počáteční úloha (31) má **alespoň jedno řešení**, které je definované na jistém intervalu $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ s $t_0 \in \mathcal{J}^o$.*

Teorém 3.13 (Picardova–Lindelöfova)**.** *Nechť platí požadavky a označení z Teorém 3.12. Nechť navíc funkce f splňuje **Lipschitzovu podmínku**, tj. existuje kladná konstanta L taková, že*

$$|f(t, \boldsymbol{u}) - f(t, \boldsymbol{v})| \le L \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$$

*pro každé $t \in \mathcal{I}$ a každé dva vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top$ z množiny $B[\boldsymbol{\eta}, b]$. Potom počáteční úloha (31) má **právě jedno** řešení, které existuje na jistém intervalu $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ s $t_0 \in \mathcal{J}^o$.*

Tip

Opět nám pro splnění **Lipschitzovy podmínky** stačí ohraničenost parciálních derivací $\frac{\partial}{\partial u_k} f(t, u_1, \dots, u_n)$ pro $k = 1, \dots, n$ na Ω.

4 Stabilita systémů diferenciálních rovnic

4.1 Pojem systému diferenciálních rovnic

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je daný index, $t_0 \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}_\infty$ daný bod. Uvažujme množiny

$$\mathcal{I} := [t_0, \infty), \quad D := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \|\boldsymbol{x}\| < a\}.$$

Dále budeme pracovat se systémem (24), kde $\boldsymbol{f} : \mathcal{I} \times D \to \mathbb{R}^n$ je daná **spojitá** n-vektorová funkce. Pod pojmem řešení systému budeme vždy myslet ω-**úplné**, viz Definice 3.3, definované na celém **nekonečném** intervalu $\mathcal{I}$.

Definice 4.1 (Stabilita řešení)**.** Říkáme, že řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) je **(ljapunovsky) stabilní**, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ a každý bod $\tau \ge t_0$ existuje $\delta > 0$ (závislé na ε a τ) s vlastností, že pokud řešení $\boldsymbol{\psi}$ systému (24) splňuje $\|\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| < \delta$, potom řešení $\boldsymbol{\psi}$ **existuje** na celém intervalu $[\tau, \infty)$ a platí $\|\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| < \varepsilon$ pro každé $t \ge \tau$. V opačném případě se řešení $\boldsymbol{\varphi}$ rovnice (24) nazývá **nestabilní**.

Definice 4.2 (Stejnoměrná stabilita)**.** Říkáme, že řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) je **stejnoměrne stabilní**, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ (závislé na ε) takové, že pro každé $\tau \ge t_0$ platí podmínka **ljapunovské stability** z Definice 4.1.

Definice 4.3 (Asymptotická stabilita)**.** Řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) se označuje jako **asymptoticky stabilní**, pokud je **stabilní** ve smyslu Definice 4.1 a pro každý bod $\tau \geq t_0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností, že pokud řešení $\boldsymbol{\psi}$ systému (24) splňuje $\|\boldsymbol{\psi}(\tau) - \boldsymbol{\varphi}(\tau)\| < \delta$, potom $\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| = 0$.

Definice 4.4 (Globální asymptotická stabilita)**.** Řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) se označuje jako **globálně asymptoticky stabilní**, pokud pro každé řešení $\boldsymbol{\psi}$ systému (24) platí $\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| = 0$.

Definice 4.5 (Exponenciální stabilita)**.** Řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) se označuje jako **exponenciálně stabilní**, pokud existují **kladné** konstanty K, α a δ takové, že pro každé $\tau \geq t_0$ je řešení $\boldsymbol{\psi}$ systému (24) splňující $\|\boldsymbol{\psi}(\tau) - \boldsymbol{\varphi}(\tau)\| < \delta$ definované na celém intervalu $[\tau, \infty)$ a platí

$$\|\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| \leq K \|\boldsymbol{\psi}(\tau) - \boldsymbol{\varphi}(\tau)\| \, e^{-\alpha(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau.$$

! Důležité

Analýzou výše uvedených definic není těžké dokázat implikace

$$\text{globální asymptotická stabilita + stabilita} \implies \text{asymptotická stabilita} \implies \text{stabilita},$$

resp. implikace

$$\text{exponenciální stabilita} \implies \text{asymptotická stabilita} \implies \text{stabilita},$$

resp. implikaci

$$\text{exponenciální stabilita} \implies \text{stejnoměrná stabilita}.$$

4.2 Stabilita triviálního řešení

Uvědomme si, že při vyšetřování stability daného řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) můžeme pomocí transformace $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varphi}$ získat nový systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}), \tag{33}$$

který má triviální, tj. identicky nulové, řešení se stejnými vlastnostmi stability. Každý takový systém se pak dá vyjádřit v tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{x}), \tag{34}$$

kde $\boldsymbol{A} : \mathscr{I} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je **spojitá** maticová funkce a $\boldsymbol{b} : \mathscr{I} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá n-vektorová funkce s vlastností $\boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ pro každé $t \in \mathscr{I}$. Také budeme ještě uvažovat k (34) jeho homogenní variantu

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

odpovídající systému (12).

Lemma 4.1. *Nechť $\boldsymbol{X}$ je $n \times n$ maticová funkce **spojitá** na intervalu $\mathscr{I}$. Předpokládejme, že existuje **nezáporná** funkce $\varepsilon : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ a kladné číslo δ s vlastností, že $\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{\eta}\| \leq \varepsilon(t)$ pro každé $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ s $\|\boldsymbol{\eta}\| \leq \delta$ pro každé $t \in \mathscr{I}$. Potom existuje **kladná** konstanta K s vlastností*

$$\|\boldsymbol{X}(t)\| \leq K\varepsilon(t) \quad \forall t \in \mathscr{I}.$$

Teorém 4.1. *Nechť* $\boldsymbol{X}$ *je nějaká daná* ***fundamentální matice*** *homogenního systému (12). Potom* ***nulové řešení*** *systému (12) je* ***(ljapunovsky) stabilní*** *právě tehdy, kdž existuje kladná konstanta L s vlastností* $\|\boldsymbol{X}(t)\| \leq L$ *pro každé* $t \in \mathcal{J}$.

Důsledek 4.1. *Nechť je matice* $\boldsymbol{A}$ *systému (12)* ***konstantní****. Potom je nulové řešení systému (12)* ***stabilní*** *právě tehdy, když má každé vlastní číslo matice* $\boldsymbol{A}$ ***nekladnou reálnou*** *část a vlastní čísla s nulovou reálnou částí jsou* ***jednoduchá****.*

Teorém 4.2. *Nechť* $\boldsymbol{X}$ *je nějaká daná* ***fundamentální matice*** *homogenního systému (12). Potom je* ***nulové řešení*** *systému (12)* ***stejnoměrně stabilní*** *právě tehdy, když existuje kladná konstanta L s vlastností*

$$\left\| \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(\tau) \right\| \leq L$$

pro každé $t, \tau \in \mathcal{J}$ *splňující* $t \geq \tau$.

Důsledek 4.2. *Nechť je matice* $\boldsymbol{A}$ *systému (12)* ***konstantní*** *na intervalu* $\mathcal{J}$. *Potom je* ***nulové*** *řešení systému (12)* ***stejnoměrně stabilní*** *právě tehdy, když je* ***stabilní****. Podle Důsledek 4.1 je to právě tehdy, když má každé vlastní číslo matice* $\boldsymbol{A}$ ***nekladnou reálnou*** *část a vlastní čísla s nulovou reálnou částí jsou* ***jednoduchá****.*

Teorém 4.3. *Nechť* $\boldsymbol{X}$ *je nějaká daná* ***fundamentální matice*** *homogenního systému (12). Potom je* ***nulové*** *řešení systému (12)* ***asymptoticky stabilní*** *právě tehdy, když platí*

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{X}(t)\| = 0.$$

Důsledek 4.3. *Nulové řešení systému (12) je* ***asymptoticky stabilní*** *právě tehdy, když je* ***globálně asymptoticky stabilní****, tj. pokud pro každé řešení* ψ *systému (12) platí*

$$\lim_{t \to \infty} \|\psi(t)\| = 0.$$

Důsledek 4.4. *Nechť je matice* $\boldsymbol{A}$ *systému (12)* ***konstantní*** *na intervalu* $\mathcal{J}$. *Potom je* ***nulové*** *řešení systému (12)* ***(globálně) asymptoticky stabilní*** *právě tehdy, když má každé vlastní číslo matice* $\boldsymbol{A}$ ***zápornou reálnou*** *část.*

Nechť nyní p je polynom stupně $n \geq 1$ s reálnými koeficienty tvaru

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad a_n > 0. \tag{35}$$

Matice $\boldsymbol{H}(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definovaná předpisem

$$\boldsymbol{H}(p) := \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

se nazývá **Hurwitzova matice** polynomu p.

Teorém 4.4 (Routhovo–Hurwitzovo kritérium)**.** *Každý kořen polynomu p v (35) má **zápornou reálnou** část právě tehdy když **Hurwitzova matice** $\boldsymbol{H}(p)$ v (36) má všechny **vedoucí hlavní minory kladné**.*

Teorém 4.5. *Nechť $\boldsymbol{X}$ je nějaká daná **fundamentální matice** homogenního systému (12). Potom je **nulové** řešení systému (12) **exponenciálně stabilní** právě tehdy, když existují **kladné konstanty** L a α s vlastností*

$$\left\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\right\| \leq Le^{-\alpha(t-\tau)}$$

pro každé $t, \tau \in \mathscr{I}$ splňující $t \geq \tau$.

Důsledek 4.5. *Nechť je matice $\boldsymbol{A}$ systému (12) **konstantní** na intervalu $\mathscr{I}$. Potom je **nulové** řešení systému (12) **exponenciálně stabilní** právě tehdy, když je **asymptoticky stabilní**, tj. právě tehdy, když má každé vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ **zápornou reálnou** část.*

4.2.1 Stabilita nelineárního systému

Teorém 4.6. *Nechť nulové řešení homogenního systému (12) je **stejnoměrně stabilní** a nechť funkce $\boldsymbol{b}$ v (34) má vlastnost*

$$\|\boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{x})\| \leq \gamma(t)\,\|\boldsymbol{x}\| \quad \forall [t, \boldsymbol{x}] \in \mathscr{I} \times D,$$

*kde $\gamma : \mathscr{I} \to \mathbb{R}$ je **nezáporná spojitá** funkce splňující podmínku*

$$\int_{t_0}^{\infty} \gamma(s) \mathrm{d}s \leq \infty.$$

*Potom je nulové řešení $\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathbf{0}$ systému (34) **stejnoměrně stabilní**.*

Teorém 4.7. *Nechť fundamentální matice $\boldsymbol{X}$ systému (12) splňuje pro jisté $K > 0$ vlastnost*

$$\int_{t_0}^{t} \left\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\right\| \mathrm{d}s \leq K \quad \forall t \in \mathscr{I}$$

*a nechť pro funkci $\boldsymbol{b}$ v (34) existuje **kladná** konstanta $\gamma < K^{-1}$ taková, že*

$$\|\boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{x})\| \leq \gamma\,\|\boldsymbol{x}\| \quad \forall [t, \boldsymbol{x}] \in \mathscr{I} \times D.$$

*Potom je nulové řešení $\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathbf{0}$ systému (34) **asymptoticky stabilní**.*

Teorém 4.8. *Nechť fundamentální matice $\boldsymbol{X}$ systému (12) splňuje podmínku z Teorém 4.5 a nechť pro funkci $\boldsymbol{b}$ v (34) platí*

$$\|\boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{x})\| \leq \gamma\,\|\boldsymbol{x}\| \quad \forall [t, \boldsymbol{x}] \in \mathscr{I} \times D,$$

*kde γ je **kladná** konstanta s $\gamma \leq \alpha L^{-1}$ pro kladná čísla L a α z Teorém 4.5. Potom je nulové řešení $\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathbf{0}$ systému (34) **exponenciálně stabilní**. Konkrétně, pro každý bod $\tau \geq t_0$ každé řešení $\boldsymbol{\psi}$ systému (34) s podmínkou $\|\boldsymbol{\psi}(t)\| \leq \alpha L^{-1}$ existuje na celém intervalu $[\tau, \infty)$ a má vlastnost*

$$\|\boldsymbol{\psi}(t)\| \leq L\,\|\boldsymbol{\psi}(\tau)\|\, e^{(\gamma L-\alpha)(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau.$$

Teorém 4.9 (Ljapunova)**.** *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je* ***reálná konstantní*** *matice* $n \times n$*, která má* ***alespoň jedno*** *vlastní číslo s* ***kladnou reálnou*** *částí. Nechť funkce* $\boldsymbol{b}$ *v (34) splňuje podmínku*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \mathscr{I}$*. Potom je nulové řešení* $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{0}$ *systému (34)* ***nestabilní****.*

! Důležité

Je důležité poznamenat, že pokud je systém (24) **lineární**, tj. funkce

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \quad [t, \boldsymbol{x}] \in \mathscr{I} \times D, \tag{37}$$

potom je transformovaný systém (33) pro každé vyšetřované řešení $\boldsymbol{\varphi}$ systému (24) **lineární homogenní systém** (12). Vlastnosti stability jednotlivých řešení lineárního systému tedy nezávisí na výběru daného řešení, tj. všechna řešení systému (24) s funkcí $\boldsymbol{f}$ z (37) mají **stejné vlastnosti stability**. Z tohoto důvodu se často hovoří o **stabilitě lineárního systému** než o stabilitě jeho řešení.

4.2.2 Autonomní systémy

Důležitou třídou diferenciálnich systémů jsou tzv. **autonomní systémy**, což jsou (nelineární) systémy (24), ve kterých funkce $\boldsymbol{f}$ **nezávisí explicitně** na proměnné t, tj.

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \tag{38}$$

kde $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^n$ je **spojitá** funkce. V tomto případě může mít systém (38) konstantní řešení $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{x}_0$ na celém $\mathbb{R}$, kde vektor $\boldsymbol{x}_0$ je kořenem rovnice $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ a nazývá se **ekvilibrium (rovnováha, stacionární bod)** systému (38). Standardně pracujeme s transformovaným systémem (34) (pomocí transformace $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{y}, \quad \|\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0\| \le a. \tag{39}$$

kde **konstantní** $n \times n$ matice $\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$ je hodnota **Jacobiho matice** funkce $\boldsymbol{g}$ ve stacionárním bodě $\boldsymbol{x}_0$.

Teorém 4.10 (Stabilita autonomního systému)**.** *Nechť je* $\boldsymbol{x}_0$ ***ekvilibrium*** *systému (38) a funkce* $\boldsymbol{g}$ *je* ***spojitě diferecovatelná*** *na* D*. Konstantní řešení* $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{x}_0$ *systému (38) má následující vlastnosti:*

1. *řešení* $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{x}_0$ *je* ***stejnoměrně stabilní*** *právě tehdy, když je* ***stabilní****;*
2. *pokud je lineární systém* $\boldsymbol{y}' = \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{y}$ ***exponenciálně stabilní****, potom je řešení* $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{x}_0$ ***exponenciálně stabilní****;*
3. *pokud má Jacobiho matice* $\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$ ***alespoň jedno*** *vlastní číslo s* ***kladnou reálnou*** *částí, potom je řešení* $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{x}_0$ ***nestabilní****.*

4.3 Přímá Ljapunova metoda

Definice 4.6. Nechť $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na jistém okolí $\mathscr{O}(\mathbf{0})$. Říkáme, že V je **(lokálně) pozitivně, resp. negativně, definitní** na okolí $\mathscr{O}(\mathbf{0})$, pokud $V(\mathbf{0}) = 0$ a $V(\boldsymbol{x}) > 0$, resp. $V(\boldsymbol{x}) < 0$, pro **každý nenulový** vektor $\boldsymbol{x} \in \mathscr{O}(\mathbf{0})$.

Definice 4.7 (Ljapunovská funkce systému)**.** Nechť $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **spojitá** funkce. Říkáme, že V je **ljapunovská** funkce systému (34), pokud existuje okolí $\mathscr{O}(\mathbf{0})$ takové, že

1. funkce V je **pozitivně definitní** na $\mathscr{O}(\mathbf{0})$;
2. funkce V je **nerostoucí podél trajektorií** systému (34) v $\mathscr{O}(\mathbf{0})$, tj. pokud $\boldsymbol{\psi}$ je řešení systému (34) s hodnotou $\boldsymbol{\psi}(\tau) \in \mathscr{O}(\mathbf{0})$ pro jisté $\tau \in \mathscr{I}$, potom složená funnkce $(V \circ \boldsymbol{\psi})(t) = V(\boldsymbol{\psi}(t))$ je **nerostoucí** pro každé $t \geq \tau$, v kterém řešení $\boldsymbol{\psi}$ existuje s hodnotou $\boldsymbol{\psi}(t) \in \mathscr{O}(\mathbf{0})$.

Teorém 4.11 (Ljapunova)**.** *Pokud pro systém (34) existuje **ljapunovská funkce**, potom je jeho **identicky nulové** řešení **stabilní**.*

Definice 4.8 (Derivace vzhledem na autonomní systém)**.** Nechť $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná funkce, která má na jinstém okolí $\mathscr{O}(\mathbf{0})$ **spojité parciální derivace prvního řádu** podle všech svých proměnných. Výraz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x) := \langle \nabla V(x), \boldsymbol{g}(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n} V'_{x_k}(\boldsymbol{x}) g_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{O}(\mathbf{0})$$

budeme nazývat **derivace funkce V vzhledem na autonomní systém** (38).

Teorém 4.12 (Ljapunova)**.** *Nechť má autonomní systém (38) **jednoznačně určené řešení**. Pokud pro tento systém **existuje ljapunovská** funkce, která má vzhledem na něj **negativně definitní derivaci**, potom je nulové řešení systému (38) **asymptoticky stabilní**.*

Teorém 4.13 (Ljapunova)**.** *Nechť $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce **spojitě diferencovatelná** na jistém okolí $\mathscr{O}(\mathbf{0})$, která splňuje následující podmínky*

1. *$V(\mathbf{0}) = 0$ a pro každé $\delta > 0$ existuje bod $\boldsymbol{x}_\delta \in \mathscr{O}_\delta(\mathbf{0})$, pro který $V(\boldsymbol{x}_\delta) > 0$;*
2. *funkce V má na okolí $\mathscr{O}(\mathbf{0})$ **pozitivně definitní derivaci** vzhledem na autonomní systém (38).*

*Potom je nulové řešení $\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathbf{0}$ systému (38) **nestabilní**.*

5 Kvalitativní teorie lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu

Lineární ODE 2. řádu můžeme zapsat jako

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = a_3(t),$$

kde a_1, a_2, a_3 jsou **spojité** funkce na **kompaktním** intervalu $[a, b]$. Budeme je ale studovat ve **Sturmově-Liouvillově (obecnějším)** tvaru

$$(p(t)x')' + q(t)x = f(t), \tag{40}$$

kde p, q, f jsou **spojité** na $[a, b]$ a $p(t) > 0$ pro každé $t \in [a, b]$.

> **Tip**
>
> Uvědomme si, že p **není nutně diferencovatelná** a tedy součin $p(t)x'$ nemusí být možné rozdiferencovat. Naopak každou LDR 2. řádu lze převést na tvar (40) pomocí integračního faktoru $e^{\int_a^t a_1(s)\mathrm{d}s}$, kde potom $p(t) = e^{\int_a^t a_1(s)\mathrm{d}s}$ pro $t \in [a, b]$.

Hlavně se ale zaměříme na homogenní variantu (40), tj.

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0. \tag{41}$$

Zde si všimněme, že množina řešení (41) je **lineární prostor** nad $\mathbb{R}$ dimenze 2, tj. fundamentální systém je tvořenými 2 lineárně nezávislými řešeními. Navíc pro každou dvojici řešení rovnice (41) je **zevšeobecněný wronskián**

$$\mathscr{W}[x_1, x_2](t) := p(t)\det\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} = x_1(t)(p(t)x_2'(t)) - x_2(t)(p(t)x_1'(t)),$$

což je konstantní na $[a, b]$. Pro každý bod $t_0 \in [a, b]$ je počátečními podmínkami $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ určené **jediné řešení** rovnice (41) a to $x(t) \equiv 0$ na $[a, b]$. Dále, pokud je x řešení (41) s $x(t) \neq 0$ pro každé $t \in [a, b]$, potom funkce

$$\tilde{x}(t) = x(t) \cdot \int_a^t \frac{1}{p(s)x^2(s)}\mathrm{d}s$$

je **lineárně nezávislé** řešení rovnice (41) na $[a, b]$, protože platí $\mathscr{W}[x, \tilde{x}] = 1$. Celkem má všeobecné řešení rovnice (41) tvar

$$y(t) = C_1x(t) + C_2\tilde{x}(t) = C_1x(t) + C_2x(t)\int_a^t \frac{1}{p(s)x^2(s)}\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b].$$

V neposlední řadě má každé **netriviální** řešení (tj. takové, které není identické nule) rovnice (41) **izolované nulové body**.

K rovnici (41) uvažujme příslušnou **Riccatiho** rovnici tvaru

$$w' + \frac{1}{p(t)}w^2 + q(t) = 0, \quad t \in [a, b]. \tag{42}$$

Potom platí, že Riccatiho rovnice (42) má řešení, které existuje na celém intervalu $[a, b]$ **právě tehdy, když** má rovnice (41) řešení **bez nulových bodů** v $[a, b]$. Přesněji, pokud je w řešení (42), které existuje na celém $[a, b]$, pak funkce x, která je **netriviální** řešení lineární ODE 1. přádu tvaru

$$x' = \frac{w(t)}{p(t)} x,$$

tj. $x(t) = e^{\int_a^t \frac{w(s)}{p(s)} \mathrm{d}s}$, je řešení rovnice (41) bez nulových bodů v $[a, b]$. Naopak, pokud je x řešení (41) bez nulových bodů, pak funkce $w(t) := \frac{p(t)x'(t)}{x(t)}$ je řešením (42), které existuje na celém $[a, b]$.

5.1 Prüferova transformace

Nechť x je řešení rovnice (41), pak neboť funkce $x(t)$ a $x'(t)$ nemohou být současně nulové v každém bodě $[a, b]$, můžeme uvažovat $\rho(t)$ a $\varphi(t)$ definované vztahy

$$x(t) = \rho(t) \sin \varphi(t), \quad p(t)x'(t) = \rho(t) \cos \varphi(t), \quad t \in [a, b]. \tag{43}$$

Funkce $\rho(t)$ se nazývá **Prüferův poloměr** a funkce $\varphi(t)$ **Prüferův úhel**. Uvedená transformace "souřadnic $[x(t), p(t)x'(t)]$" do "polárních souřadnic $[\rho(t), \varphi(t)]$" se označuje jako **Prüferova**.

Lze ukázat, že funkce ρ a φ jsou řešením systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= \left(\frac{1}{p(t)} - q(t) \right) \rho(t) \cos \varphi(t) \sin \varphi(t), \\ \varphi'(t) &= \frac{1}{p(t)} \cos^2 \varphi(t) + q(t) \sin \varphi(t). \end{aligned} \tag{44}$$

Dále platí, že Prüferova transformace **existuje** a funkce ρ, φ mají **spojité** derivace na $[a, b]$, pokud řešení x nemá **nulový bod** v $[a, b]$.

Lemma 5.1. *Nechť x je **netriviální** řešení rovnice (41), která má v $[a, b]$ právě n nulových bodů a $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b$ a funkce $x(t) > 0$ pro $t \in (a, t_1)$. Dále nechť $\varphi(t)$ je funkce definovaná podmínkami*

- *$\varphi(t_k) = k\pi$ pro všechna $k \in \{1, \dots, n\}$;*
- *$\varphi(a) = 0$, pokud $x(a) = 0$;*
- *$\varphi(t) = \operatorname{arccot} \frac{p(t)x'(t)}{x(t)}$ pro $t \in [a, t_1)$;*
- *$\varphi(t) = \operatorname{arccot} \frac{p(t)x'(t)}{x(t)} + k\pi$ pro $t \in (t_k, t_{k+1})$;*
- *$\varphi(t) = \operatorname{arccot} \frac{p(t)x'(t)}{x(t)} + n\pi$ pro $t \in (t_n, b]$.*

Pak platí, že $\varphi \in C^1([a, b])$ a splňuje (43) a (44) pro funkci $\rho(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (p(t)x'(t))^2}$ pro $t \in [a, b]$. Navíc platí, že $\varphi(t) > k\pi$ pro všechna $t \in (t_k, b]$ a $k \in \{1, \dots, n\}$.

5.2 Základy Sturmovy teorie

Kromě rovnice (41) uvažujeme ještě další rovnici

$$(\tilde{p}(t)x')' + \tilde{q}(t) = 0, \quad t \in [a,b], \tag{45}$$

kde $\tilde{p}, \tilde{q} \in C([a,b])$ a $\tilde{p}(t) > 0$ na $[a,b]$.

Definice 5.1 (Sturmova majorantní podmínka)**.** Uvažujme úlohy (41) a (45). Podmínku

$$\tilde{q}(t) \geq q(t) \quad \wedge \quad p(t) \geq \tilde{p}(t), \quad t \in [a,b] \tag{46}$$

se označuje jako **Sturmova majorantní podmínka** pro (41). Rovnice (45) se nazývá **Sturmova majoranta** rovnice (41) a zároveň je rovnice (41) **Sturmova minoranta** rovnice (45).

Definice 5.2 (Striktní Sturmova majorantní podmínka)**.** Uvažujme úlohy (41) a (45). Nechť je splněna podmínka (46) z Definice 5.1 a navíc existuje $t_0 \in [a,b]$ takové, že

$$\begin{gathered} \tilde{q}(t_0) > q(t_0) \\ \text{nebo} \\ p(t_0) > \tilde{p}(t_0) \wedge \tilde{q}(t_0) = q(t_0) \neq 0, \end{gathered} \tag{47}$$

pak se tato podmínka označuje jako **striktní Sturmova majorantní podmínka**.

Teorém 5.1 (Sturmova porovnávací věta)**.** *Nechť rovnice (45) je Sturmova majoranta pro (41) a nechť $x, \tilde{x}$ je* ***netriviální řešení*** *(41), resp. (45), pričemž nechť x má právě n nulových bodů v $(a,b]$, tj. $a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq b$. Pokud řešení $\tilde{x}$ splňuje nerovnost*

$$\frac{p(a)x'(a)}{x(a)} \geq \frac{\tilde{p}(a)\tilde{x}'(a)}{\tilde{x}(a)}, \tag{48}$$

potom má $\tilde{x}$ na $(a,t_n]$ alespoň n nulových bodů. Dále, pokud platí nejen (48), ale i

- $\frac{p(a)x'(a)}{x(a)} > \frac{\tilde{p}(a)\tilde{x}'(a)}{\tilde{x}(a)}$
- *nebo* $\frac{p(a)x'(a)}{x(a)} = \frac{\tilde{p}(a)\tilde{x}'(a)}{\tilde{x}(a)}$ *a navíc je splněna podmínka (47) na (a,t_n),*

potom má $\tilde{x}$ alespoň n nulových bodů v (a,t_n). Doplňme, že pokud $x(a) = 0$, resp. $\tilde{x}(a) = 0$, pak v (48) klademe $\frac{p(a)x'(a)}{x(a)} = \infty$, resp. $\frac{\tilde{p}(a)\tilde{x}'(a)}{\tilde{x}(a)} = \infty$.

! Důležité

Všimněme si, že čistě požadavek splnění (48) nám pouze zaručí alespoň n nulových bodů na $(a,t_n]$, zatímco přidáním druhé podmínky z Teorém 5.1 dostaneme dokonce alespoň n nulových bodů na (a,t_n).

Teorém 5.2 (Sturmova oddělovací věta)**.** *Nechť $x, \hat{x}$ jsou řešení rovnice (41) a $s, t \in [a, b]$ takové, že $s < t$, jsou sousední nulové body funkce x. Potom platí*

1. *$\hat{x}$ je **lineárně závislé** s x, pak $\hat{x}(s) = 0 = \hat{x}(t)$ a $\hat{x}$ nemá nulové body v (s, t)*
2. *nebo $\hat{x}$ je **lineárně nezávislé** s x, pak $\hat{x}$ má v $[s, t]$ právě jeden nulový bod z (s, t).*

> Tip
>
> Jinak řečeno, Teorém 5.2 znamená, že se nulové body lineárně nezávislých řešení rovnice (41) vzájemně oddělují.

5.3 Základy oscilační teorie

Definice 5.3 (Oscilatorické řešení)**.** Uvažujme nyní rovnici (41) na **neohraničeném** intervalu $[a, \infty)$. Říkáme, že **netriviální řešení** je **oscilatorické** (*osciluje*) na $\mathcal{O}(\infty)$, pokud má funkce x **nekonečně mnoho** nulových bodů na $\mathcal{O}(\infty)$. V opačném případě je x *neoscilatorická* na $\mathcal{O}(\infty)$.

Teorém 5.3 (Oscilatorická rovnice (41))**.** *Pro rovnici (41) definovanou na $[a, \infty)$ jsou následující podmínky **ekvivalentní***

1. *existuje oscilatorické řešení rovnice (41);*
2. *každé řešení rovnice (41) osciluje.*

> Poznámka
>
> V případě splnění podmínek z Teorém 5.3 se (41) označuje jako **oscilatorická** na $[a, \infty)$; v opačném případě se o *neoscilatorickou* rovnici.

Teorém 5.4 (Oscilační vlastnosti rovnic (41), (45))**.** *Nechť jsou rovnice (41), (45) definované na $[a, \infty)$ a nechť splňují **Sturmovu majorantní podmínku** (46) na $[a, \infty)$. Potom platí*

1. *pokud je rovnice (41) **oscilatorická**, pak je **oscilatorická** i (45);*
2. *pokud je rovnice (45) **neoscilatorická**, pak **neosciluje** ani (41).*